**Aufgabenanalyse: Textlängen manipulieren**

**Fachdidaktik:**

SuS ab Ende des SEK1 kennen die Situation, Ausarbeitungen mit einer bestimmten Seitenzahl abgeben zu müssen und sind bereits bewusst oder unbewusst auf das Phänomen “Zusammenhang von Schriftgröße und Textlänge” gestoßen.

Schwerpunkt: **Modellieren von Daten** mit bekannten mathematischen Funktionen: Dabei wird besonders der Kovariationsaspekt im (bivariaten) Datensatz in den Fokus genommen und mithilfe digitaler Werkzeuge ausgewertet (Regression mit Schieberegler und Residuenplot). Als anleitende Struktur eignet sich hierbei hervorragend der **Forscher-Kreislauf** (angelehnt an den PPDAC-Zyklus von Wild & Pfannkuch, 1999):

* Forscherfrage/Vermutungen äußern: Problem wird fokussiert, indem Schriftgröße und Textlänge als (offensichtlich) voneinander abhängige Größen betrachtet werden. Die Forscherfrage intendiert weniger die genauen Wirkmechanismen wie die Abhängigkeit (theoretisch) erklärt werden kann. Vielmehr regt diese die SuS an, durch systematisches Probieren und Beobachten Vermutungen zu äußern. Das (Vor-)Experiment mit der Veränderung der Schriftgröße und dem Mitverändern der Textlänge (*Kovariationsaspekt*)ermöglichen den SuS ein dynamisches Miterleben des Zusammenhangs (SuS schlüpfen sozusagen in die Funktion).Sie könnten dabei feststellen, dass theoretische Erklärungsversuche (Ausdehnung eines Buchstabens in zwei Dimensionen → Quadratischer Zusammenhang) nicht vollständig ausreichen, um den Vorgang/Zusammenhang vollends zu erfassen (Zeilenumbrüche, …). Zudem können die SuS durch die freie Textwahl die Erfahrung machen, dass die Art der Schriftzeichen unerheblich ist. Gleichzeitig erkennen Sie aber, dass es für das folgende Experiment sinnvoll ist, die Textpassage gleich zu lassen (Anzahl der Schriftzeichen bleibt konstant, d. h. alle arbeiten mit der gleichen Textpassage).
* Daten sammeln: Es ist notwendig, Daten zu erheben, um eigene Vermutungen zu überprüfen (Notwendigkeit von Daten, siehe Wild & Pfannkuch, 1999). Durch die digitale Möglichkeit, die Textlänge über die Rahmenhöhe zu messen, hilft den SuS die Hürden des händischen Messvorgangs zu überwinden. Die Erforschung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Schriftgröße und Textlänge wird dadurch erleichtert. Das Eintragen der einzelnen Wertepaare in die Tabelle fokussiert in dieser Phase schwerpunktmäßig den *Zuordnungsaspekt.*
* Daten untersuchen: Zum Aufbereiten der Daten werden digitale Tools (CODAP, Excel) verwendet um den Darstellungswechsel von Tabelle nach Graph problemlos (ohne Hindernisse beim Skalieren der Koordinatenachsen und ohne Übertragungsfehler) und schnell zu vollziehen. Zudem bietet das Streudiagramm auf einen Blick (*Objektaspekt*) die Möglichkeit aus der “Brille des *Kovariationsaspektes*” auf die Funktion zu schauen (Flexible Repräsentation der relevanten Daten, siehe Wild & Pfannkuch, 1999). Für die eigentliche Anpassung der Daten durch Funktionen bietet die Schiebereglerfunktion (von CODAP) ideale Voraussetzungen (schnell und dynamisch). Der Vorteil gegenüber einer klassischen Regression (durch den Rechner ausgeführt) ermöglicht das händische Anpassen den SuS selbst in die Rolle des Anpassungsinstruments zu schlüpfen um das Optimum (je näher, desto besser) zu bestimmen. Neben den grafischen Darstellungen der drei Funktionen werden unmittelbar dynamische Funktionsterme dargestellt. Zum einen kann diese Darstellung dazu anregen die Bedeutung der verschiedenen Parameter der Funktionsterme (Lineare Funktion: Steigung und y-Achse; Quadratische Funktion: ax\*2 +b\*x +c) im Verlauf des Graphen zu interpretieren (“Datenfit”). Zum anderen führen uns (v. a.) graphische Darstellungen und Fragestellungen zur letzten Phase der Modellierung:  Wie können die verschiedenen Funktionen bezüglich ihrer Eigenschaften von Zuordnung, Kovariation und als Ganzes im Sachkontext gedeutet werden? (“Kontextfit”)
* Austausch und Schlussfolgerung: Diese Phase des Modellierungskreislaufs bildet den Kern der Aufgabe. SuS interpretieren und validieren verschiedene Funktionsanpassungen einmal im Kontext des beobachteten Zusammenhangs (also der Daten) und einmal im Kontext der Genauigkeit (Größe der Residuen). SuS werden dazu ermutigt zu reflektieren, inwieweit der Grad der Passung der Funktion an die Daten ein Gütekriterium ist: Ist eine Parabel deswegen als Modell gut, weil Sie näher an den Datenpunkten liegt und wäre deshalb nicht sogar eine Polynomfunktion (n-1)-Grades das Optimum bei n Datenpunkte? Ist also die Nullfunktion im Residuenplot perfekt? Oder ist es besser, die einfachste Funktion zu nehmen, deren Residuenplot zufällig (ohne Trend) um die Nulllinie verteilt ist? Vielleicht ist es sinnvoll, an dieser Stelle des Modellierens den Kontext im Datenfit zu berücksichtigen, indem Wirkmechanismen (Schriftgröße → Textlänge) wieder bewusst in den Blick genommen werden bzw. das erst Vorgang des Modellierens den Modellierenden dazu angeregt Erklärungsversuche zu Ursache und Wirkung zu formulieren.  
  Zusammengefasst lernen SuS in dieser Phase vor allem, dass mathematische Modelle (hier: Funktionen) bei der Beschreibung von Zusammenhängen in bivariaten Datensätze nicht per se als “richtig oder falsch”, sondern vielmehr als “nützlich oder weniger nützlich” kategorisiert werden kann (vgl. Box & Draper, 1987).

Weitere Potentiale (Anschlussfähigkeit):

* Die Erforschung der Bedeutung des Parameters a im Funktionsterm f(x)=a+x^2 bei der Anpassung der Daten für verschiedene Textpassagen (Frage: Wie verändert sich der Parameter a bei verschiedenen langen Textpassagen)
* Die Auswirkungen von Zeilenumbrüchen führen zur Frage, welchen Einfluss die Textbreite auf die Textlänge hat. Bei gleichbleibender Schriftgröße ist offensichtlich, dass eine Verkleinerung der Textbreite eine Vergrößerung der Textlänge zur Folge hat. Der genaue Zusammenhang kann wiederum durch ein Experiment (mit der gleichen digitalen Umgebung eines Textverarbeitungsprogramms) untersucht werden. Als Diskussionsgrundlage dient zum Beispiel die Gegenüberstellung von quadratischer, antiproportionaler (Textfläche als Produkt aus Textbreite und Textlänge) und exponentieller Abnahme (Wachstumsfaktor konstant) als Funktionsmodell für die Daten.
  + Die Einbeziehung von Definitionsmenge und Wertemenge in der mathematischen Welt (= reelle Zahlenbereiche) und die Gegenüberstellung dieser Mengen in der realen Welt (diskrete Zahlen)
  + Erforschen von Extremen (sehr große/kleine Schriftgrößen/Textbreiten): Gültigkeitsbereich mathematischer Modelle

**Bildungsplanbezug:**

* Einfache Zusammenhänge zwischen (Zahlen [E]) und Größen (bei Alltagssituationen [E]) erkennen und beschreiben [Klasse 5/6]
* Zusammenhänge durch Tabellen, Gleichungen, Graphen oder Text darstellen [Klasse 7/8/9] und zwischen den Darstellungsformen (situationsgerecht [Klasse 7/8/9: M/E, bei G nur lineare Funktionen] wechseln [Klasse 10] 🡪 Mit mathematischen Darstellungen umgehen [Klasse 7/8/9]
* Einfache funktionale Zusammenhänge in verbaler, tabellarischer und graphischer Form (auch im Koordinatensystem) darstellen und zwischen den Darstellungsformen wechseln [Klasse 5/6]
* Alltagsbezogene Sachverhalte aus Darstellungen ablesen (z.B. größte und kleinste Werte, Zunehmen und Abnehmen, Zeitpunkte) [Klasse 7/8/9] 🡪 Mit mathematischen Darstellungen umgehen/Mit Medien mathematisch arbeiten
* bei linearen Funktionen das Änderungsverhalten im Sachzusammenhang [mithilfe der Änderungsrate: E] beschreiben.
* quadratische Zusammenhänge durch Tabellen und Gleichungen beschreiben und graphisch darstellen 🡪 Mit mathematischen Darstellungen umgehen/Mit Medien mathematisch arbeiten [Klasse 7/8/9]
* die Wirkung der Parameter a und [c] in der Parabelgleichung y=a\*x^2+c auf den Graphen abbildungsgeometrisch als Streckung, [Spiegelung, Verschiebung] deuten [Klasse 7/8/9]
* Anwendungsaufgaben mithilfe quadratischer Funktionen lösen [Klasse 7/8/9: M/E] 🡪 Probleme mathematisch lösen/Mathematisch modellieren/Mit Medien mathematisch arbeiten
* Den dynamischen Zusammenhang zwischen Größen in einfachen Situationen anschaulich erläutern [Klasse 5/6: E]
* Funktionen als eindeutige Zuordnungen z. B. von x-Werten zu y-Werten, von nicht eindeutigen Zuordnungen unterscheiden [Klasse 7/8/9: E]
* Die Graphen der Potenzfunktionen f mit f(x)=x^k (k=-1,-2) unter Verwendung charakteristischer Eigenschaften skizzieren [Klasse 10: E]
* Die Wirkung von Parametern in Funktionstermen von Potenz-, …. Funktionen auf deren Graphen abbildungsgeometrisch deuten [Klasse 10: E]

**Digitale Werkzeuge:**

* CODAP mit vorbereiteten Tabellen, Graphen und dem Werkzeug, drei Funktionsanpassungen (proportionale, lineare und quadratische Funktionen) durchzuführen.
* Excel ermöglicht der LK (ggf. auch den SuS) (proportionale, lineare und quadratische und weitere) Regressionen durchzuführen. Als weitere Darstellung dient der Residuenplot, der als Güte-Maßstab verwendet werden kann.